MESCLUM

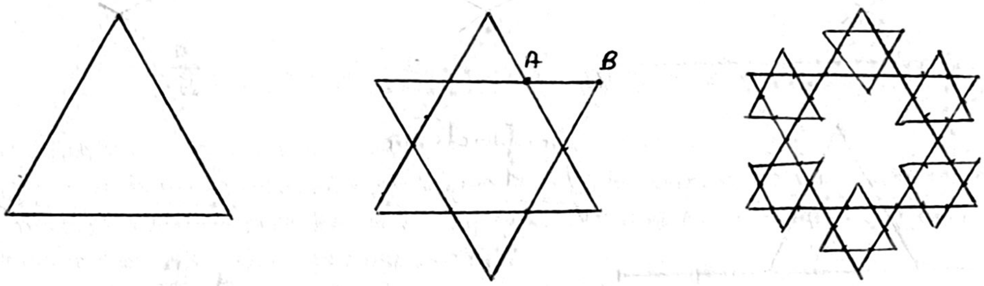
EXERCICES DIVERS & EN VRAC

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Ile de Koch :

Voici les 3 premières étapes de construction de l'objet fractal* appelé "l'île de Koch" :



① ② ③

On continue en répétant ce processus de construction une infinité de fois. a) Montrer que l'aire de la figure obtenue est finie

b) Trouver le périmètre de la figure obtenue à la n-ième étape, puis montrer que le périmètre de la figure achevée (pour $n \to +\infty$) est infini.

a) Majorons la surface de l'objet obtenu au rang n :

- au rang ① $\quad a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ (si a = côté du 1er triangle équilatéral)

- au rang ② $\quad \cdots + \left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3$ (3 petits triangles)

- au rang ③ $\quad \cdots + \left(\frac{a}{9}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 3$ (3 petits triangles sur chacune des 6 étoiles du pourtour...)

- au rang ④ $\quad \cdots + \left(\frac{a}{3^3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \times 3$

etc $\qquad$ etc

- au rang ⓝ $\quad \cdots + \left(\frac{a}{3^{n-1}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^{n-2} \times 3$

La surface S de l'île de Koch sera majorée par :

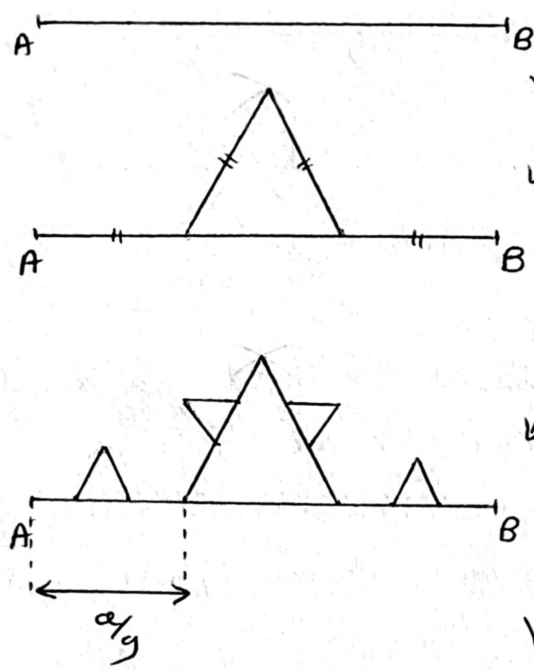
$$S \leq a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n \geq 2} \left(\frac{a}{3^{n-1}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^{n-2} \times 3$$

$$S \leq a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$ et la série converge !

(réf : Helpware magazine, hiver 92/93, IBM, pp 23 - 26)

(* : Mandelbrot 1967)

b) Tout revient à trouver le périmètre de l'île de Koch situé entre A et B (cf figure de l'énoncé). On a :



étape		longueur :
①		$\frac{a}{3}$
	on fractionne 1 segment	
②		$+ \frac{a}{9}$
	on fractionne 4 segments	
③		$+ 4 \cdot \frac{a}{3^3}$
	on fractionne 4^2 segments	
④		$+ 4^2 \cdot \frac{a}{3^4}$
- - -		- - -
ⓝ		$+ 4^{n-2} \cdot \frac{a}{3^n}$

La longueur ℓ_{AB} de l'île de Koch, entre A et B, à la N-ième étape sera :

$$\ell_{AB} = \frac{a}{3} + \sum_{n \geq 2} 4^{n-2} \frac{a}{3^n} = \frac{a}{3} + \frac{a}{16} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^{N-1} \cdot \frac{a}{3}$$

Le périmètre ℓ de l'île de Koch à la N-ième étape

$$\ell = 12\,\ell_{AB} = 4\left(\frac{4}{3}\right)^{N-1} \cdot a$$

qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

Le fractale a donc bien un périmètre infini.

Espaces métriques

Soit d l'application

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto d(x, y) = \left|x^3 - y^3\right|.$$

1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer la boule ouverte $B(a, r)$ de centre a et de rayon r, puis son adhérence $\overline{B}(a, r)$ dans l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ et pour les cas suivants : a) $a = 0$ et $r = 1$; b) $a = 1$ et $r = 1$.
3) La distance d est-elle induite par une norme ?

Solution :

1) ok

2) $x \in B(0,1) \iff |x^3 - 0| < 1 \iff |x| < 1$

$x \in B(1,1) \iff |x^3 - 1| < 1 \iff 0 < x^3 < 2 \iff x \in]0, \sqrt[3]{2}[$.

3) S'il existait une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}$ tq d soit induite par $\| \ \|$, on aurait :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad d(x,y) = \|x - y\|$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad d(x, 0) = \|x\|.$$

Posons donc $\|x\| = d(x,0) = |x^3|$. Comme :

$$\|\lambda x\| = |\lambda^3 x^3| = |\lambda|^3 \|x\|$$

est différent de $|\lambda| \|x\|$ pour au moins une valeur de λ, on peut affirmer que <u>d ne provient pas d'une norme</u>.

---

[0] [uesm0016] v1.00 Dany-Jack Mercier TD M41 99-00

E espace préhilbertien complexe de dim. finie (ie espace hermitien)
φ endomorphisme hermitien de E
$\|\varphi\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}$ = norme opérateur sur $\mathcal{E}nd(E)$

On sait que $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\varphi(x)\|$. Alors :

1) φ est diagonalisable dans une base orthonormée et toutes ses v.p. sont réelles (Ramis II.4.2.2 p112)

2) $\|\varphi\| = \sup_{\lambda \in \sigma(\varphi)} |\lambda|$ où $\sigma(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \varphi - \lambda Id$ non inversible$\}$ = spectre de φ
(voir RMS 90-91 CAPES n° 6539 II p25 pour une partie consacrée à l'étude de ce spectre)

3) $\|\varphi\| = \sup_{X\neq 0} \frac{|X^*AX|}{\|X\|^2}$ où $A = Mat(\varphi; e)$ où $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x = \sum x_i e_i$.

---

2) Il existe une b.o. $e = (e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de φ.
$A = Mat(\varphi; e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $|\lambda_1| = \sup |\lambda_i|$.

Si $x = \sum x_i e_i$, $\varphi(x) = \sum x_i \lambda_i e_i$ et $\|\varphi(x)\|^2 = \sum |\lambda_i|^2 |x_i|^2 = |\lambda_1|^2 \sum \frac{|\lambda_i|^2}{|\lambda_1|^2} |x_i|^2 \leq |\lambda_1|^2 . \|x\|^2$
entraîne $\|\varphi\| \leq |\lambda_1|$. Réciproquement, pour $x = e_1$ $\frac{\|\varphi(e_1)\|}{\|e_1\|} = |\lambda_1|$ d'où $\|\varphi\| = |\lambda_1|$.

3) * Montrons le résultat quand $A = Mat(\varphi; e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, ie quand e est une b.o. formée de vecteurs propres de φ (qui existe : voir a)).

$X^*AX = \sum \lambda_i |x_i|^2$ et si $X \neq 0$, $\frac{|X^*AX|}{\|X\|^2} \leq \frac{\sum |\lambda_i| . |x_i|^2}{\sum |x_i|^2} \leq |\lambda_1|$ comme au 2).

d'où $\sup_{X\neq 0} \frac{|X^*AX|}{\|X\|^2} \leq |\lambda_1|$.

De plus, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{|X^*AX|}{\|X\|^2} = |\lambda_1|$, donc $\sup_{X\neq 0} \frac{|X^*AX|}{\|X\|^2} = |\lambda_1| \underset{2)}{=} \|\varphi\|$

* Si e' est une b.o et si $B = Mat(\varphi; e')$, il suffit d'écrire le chgt de base pour obtenir la formule avec B : notons $P = P_e^{e'}$ la mat. de passage de e vers e'.
$B = P^{-1}AP$ et $P^{-1} = P^*$ car P orthogonale.
En notant $X = PY$, X décrit $\mathbb{C}^n$ ssi Y décrit $\mathbb{C}^n$ et pour $Y \neq 0$:

$$\frac{|Y^*BY|}{\|Y\|^2} = \frac{|(P^{-1}X)^* P^{-1}AP . P^{-1}X|}{\|X\|^2} = \frac{|X^*AX|}{\|X\|^2} \quad \text{car } P^{-1} = P^*.$$

d'où la formule.

On sait qu'un opérateur normal (et en particulier unitaire) est diagonalisable dans le groupe unitaire (Ramis II 4.2.1 et 4.2.2 p111). On demande d'en déduire :

" Si $u \in \mathcal{O}(E)$ est une application orthogonale d'un e.v. euclidien E, il existe une base orthonormale e de E telle que :

$$Mat(u\,;e) = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & S_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & S_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

où I_p, I_q sont les matrices unités d'ordre p et q et où $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est distinct de $\pm I_2$. "

<u>NB</u> : Ce théorème de réduction est démontré sans faire appel aux espaces hermitiens dans Ramis II.2.3.5. p72. La méthode décrite ici est demandée en AG5.I.4.

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. E apparaît comme un s.e.v. de $\mathbb{C}^n$ grâce à l'injection

$$\varphi : E \hookrightarrow \mathbb{C}^n \qquad x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

φ est un morphisme de $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien $\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \right) = \sum \bar{z}_i z'_i$.

La matrice A de u dans la base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale (${}^tA = A^{-1}$) réelle, donc unitaire (${}^t\bar{A} = A^{-1}$) si on la considère comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. <u>C'est donc la matrice d'un endomorphisme unitaire $\tilde{u}$ de $\mathbb{C}^n$ et on aura</u> (Ramis II 4.2.1 et 4.2.2 p111) :

* <u>Toutes les valeurs propres de A sont de module 1</u> : Si x est un vecteur propre associé à λ, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1$.

* <u>Si λ et μ sont 2 v.p. distinctes de $\tilde{u}$, les s.e.v. propres $E(\lambda)$ et $E(\mu)$ sont orthogonaux</u> : En effet, si $x \in E(\lambda)$ et $y \in E(\mu)$ $(ux, y) = \bar{\lambda}(x,y)$ et $u(y) = \mu y \Leftrightarrow y = \mu u^{-1}(y)$ donc $(ux, y) = (x, u^{-1}y) = \frac{1}{\mu}(x,y) = \bar{\mu}(x,y)$. Finalement $\bar{\lambda}(x,y) = \bar{\mu}(x,y)$ d'où $(x,y) = 0$.

* <u>A est diagonalisable dans une b.o. de $\mathbb{C}^n$</u>

* A étant réelle, $\chi_A(X) = \det(A - XI) \in \mathbb{R}[X]$ donc si λ est v.p. de A de multiplicité k, $\bar{\lambda}$ sera v.p. de A de multiplicité k.

On exhibe ainsi une b.o. $e' = (\underbrace{e'_1, \dots, e'_p}_{\text{vect. propres associés à } 1}, \underbrace{e'_{p+1}, \dots, e'_{p+q}}_{\text{vect. propres associés à } -1}, \underbrace{e'_{p+q+1}, \dots, e'_n}_{\text{vect. propres associés aux v.p. } \lambda_j \notin \mathbb{R}})$

1) On peut supposer que $e'_1, \dots, e'_{p+q}$ sont des <u>vecteurs réels</u> (ie à coordonnées réelles) (En effet, si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ et si λ est une v.p réelle de A, le sev propre $E(\lambda)$ peut être considéré comme

un $\mathbb{R}$-sev de $\mathbb{R}^n$, ou un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^n$. Notons $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ou $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ suivant le cas. Si $e=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$, alors c'est aussi une base de $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ puisque $e_1,\dots,e_n$ sont toujours des vect. propres de A dans $\mathbb{C}^n$, et si $x\in E_{\mathbb{C}}(\lambda)$, $x\in\mathbb{C}^n$ et $A(x)=\lambda x \Rightarrow A(\bar{x})=\lambda\bar{x} \Rightarrow \bar{x}\in E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ d'où $\frac{x+\bar{x}}{2}$ et $\frac{x-\bar{x}}{2i}$ dans $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$, donc s'expriment comme comb. lin. à coeff. réels des vecteurs $e_1,\dots,e_n$. Donc $x=\frac{x+\bar{x}}{2}+i\left(\frac{x-\bar{x}}{2i}\right)\in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(e_1,\dots,e_n)$ et e est bien une base de $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ formée de vecteurs réels. CQFD)

2) <u>Vecteurs $e'_{p+q+1},\dots,e'_n$</u> : On peut les associer 2 à 2 de façon à avoir

$$(e'_j, e'_{j+1}) \qquad e'_j\in E(\lambda) \qquad e'_{j+1}=\bar{e}'_j\in E(\bar{\lambda})$$

car $x\in E(\lambda) \Leftrightarrow Ax=\lambda x \Leftrightarrow A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}\in E(\bar{\lambda})$ donc $\overline{E(\lambda)}=E(\bar{\lambda})$

Enfin, dans chaque sev E_j de base o. (e'_j, e'_{j+1}), on préfère la base

$(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}) \doteq \left(\frac{e'_j+e'_{j+1}}{\sqrt{2}}, \frac{e'_j-e'_{j+1}}{i\sqrt{2}}\right)$ qui a le mérite d'être orthonormale $\left(\left\|\frac{e'_j+e'_{j+1}}{\sqrt{2}}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|e'_j\|^2+\|e'_{j+1}\|^2)=1\dots\right)$ et <u>formée de vecteurs réels</u> (car $e'_{j+1}=\bar{e}'_j$). En notant $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ les valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$ associées aux vect. propres e'_j et e'_{j+1}, la matrice représentant $\tilde{u}|_{E_j}$ dans la nouvelle base $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1})$ sera :

$$B_j = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}P \quad \text{où } P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\text{soit } B_j = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = S_{-\theta}$$

<u>Ccl</u> : Il existe une b.o. $e''=(e'_1,\dots,e'_p,e'_{p+1},\dots,e'_{p+q},\varepsilon_{p+q+1},\dots,\varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$, formée de vecteurs réels, et telle que :

$$M \doteq \mathrm{Mat}(\tilde{u}\,;e'') = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{p} & & & & 0 \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{q} & & & \\ & & S_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & S_{\theta_r}\end{pmatrix} \quad \text{où } S_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

<u>1e façon de conclure</u> : La matrice de u dans la base orthonormale de E $\rho^{-1}(e'') \doteq (\rho^{-1}(e'_1),\dots,\rho^{-1}(\varepsilon_n))$ est M (en effet, $u(x)=y$ dans E s'écrit $A(X)=Y$ où $X,Y\in\mathbb{R}^n$ sont les vect. colonnes représentant x et y. D'après la déf de $\tilde{u}$, on aura :

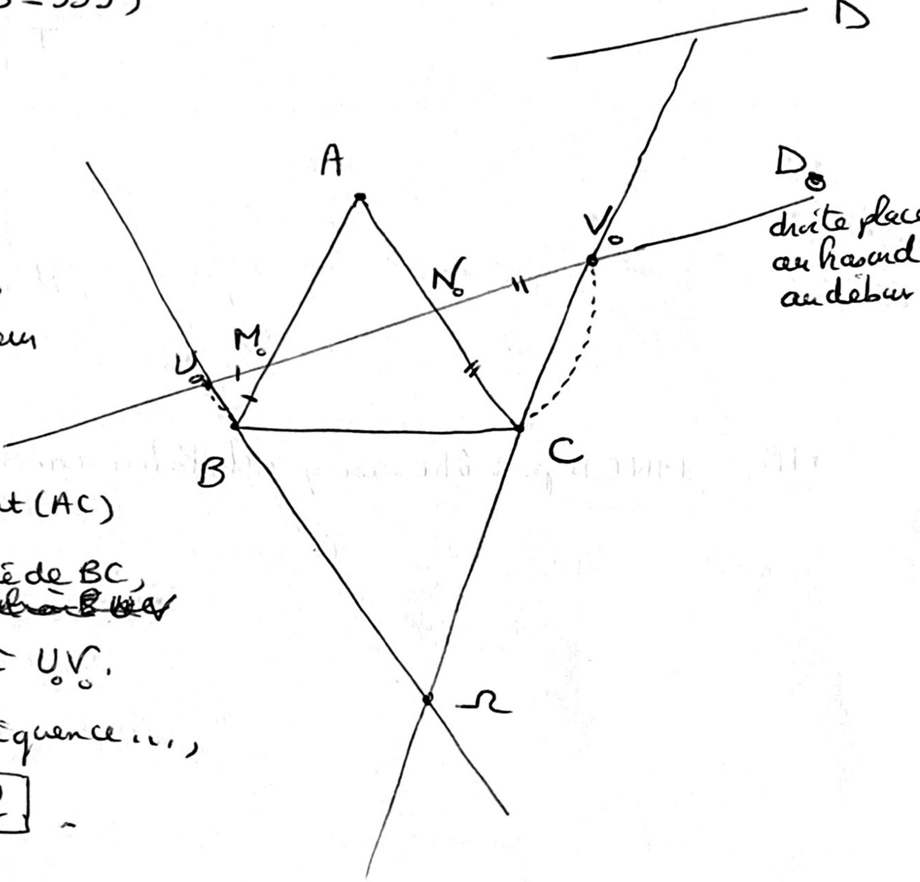
$u(x)=y \Leftrightarrow A(X)=Y \Leftrightarrow \tilde{u}(\rho(x))=\rho(y)$. Donc si $b=(b_1,\dots,b_n)$ est une base de E d'image $\rho(b)=(\rho(b_1),\dots,\rho(b_n))$, $u(b_j)=\sum a_{ij}b_i \Rightarrow \tilde{u}(\rho(b_j))=\rho(\sum a_{ij}b_i)=\sum a_{ij}\rho(b_i)$ ie $\mathrm{Mat}(u\,;b)=\mathrm{Mat}(\tilde{u}\,;\rho(b))$.

<u>2e façon de conclure</u> : $\exists P$ unitaire $M=P^{*}AP$. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers la b.o e'' formée de vecteurs réels. P sera donc à coefficients réels, donc orthogonale. <u>Ainsi, M représentera bien la matrice de u dans une b.o. de E</u>.

Une construction à la règle et au compas.

On considère un triangle non aplati ABC. On se donne une droite D parallèle ni à (AB), ni à (AC), ainsi qu'un réel positif $t > 0$.
Construire 2 points M et N situés resp. sur les droites (AB) et (AC) tels que (MN) soit parallèle à D et que le périmètre du quadrilatère $MNCB$ soit égal à t.

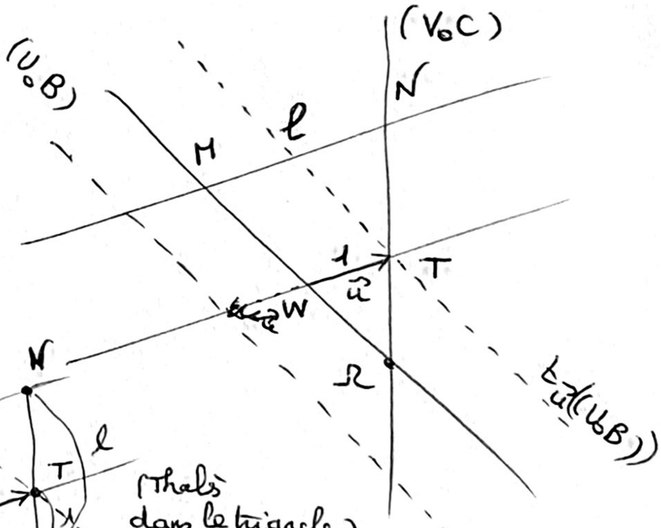
(réf. APMEP mai-juin 2005 p 338, dans l'article "Brèves rencontres d'hier à demain", Henri Bareil, pp 335 – 339)



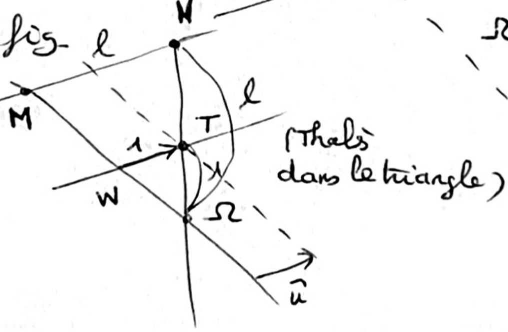
Posons $l = t - BC$.
l est une constante connue qui doit être positive.
Le cercle de centre M_0 et rayon M_0B coupe la droite D_0 en U_0 à l'extérieur du triangle ABC.
On construit aussi le point V_0 au compas.
Ici, D_0 est $\parallel$ à D, et coupe (AB) et (AC) resp. en M_0 et N_0.
Le périmètre de M_0N_0CB ~~est égal à U_0V_0~~ diminué de BC, ie $l = t - BC$, doit être égal à U_0V_0.
Il faut placer M_0 et N_0 en conséquence..., càd de façon à avoir $\boxed{U_0V = l}$.

~~Remarque~~ :

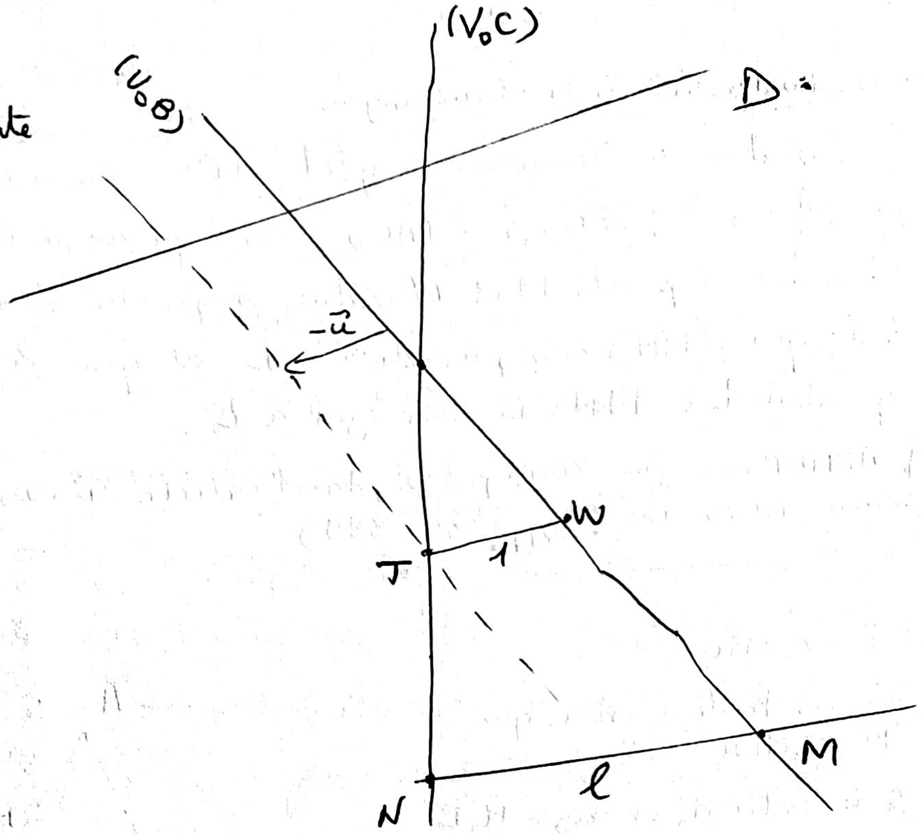
On construit donc Ω intersection de (U_0B) et (V_0C). ~~Ω est construite~~.
(V_0C) coupe la droite $t_{\vec{u}}((U_0B))$ translatée de (U_0B) par un vecteur $\vec{u}$ directeur de D et normalisé, ~~(resp. ...) est construite~~ en un pt T. On construit W et T comme ci-contre.



Le Th. de Thalès permet alors de construire M et N solutions comme sur la fig. ci-contre.



Autre solution : on translate aussi du vecteur $-\vec{u}$ et l'on obtient une autre solution.



NB : MNCB peut être un quadrilatère croisé.

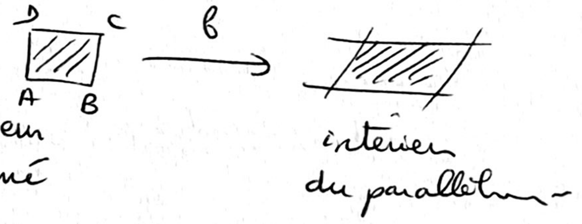
Soient E et E' 2 espaces affines, $f : E \to E'$ une application affine et $\mathcal{A}$ une partie non vide de E.

Mq l'image par f de l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est l'enveloppe convexe de l'image de $\mathcal{A}$.

Application : quelle est l'image de l'intérieur d'un carré par une appl. affine ? par une bijection affine ?

* L'image d'un convexe par une appl. affine est un convexe, donc $f(\mathrm{Conv}\,\mathcal{A})$ sera un convexe contenant $f(\mathcal{A})$, donc $f(\mathrm{Conv}\,\mathcal{A}) \supset \mathrm{Conv}\,f(\mathcal{A})$.
Réc., si $M \in f(\mathrm{Conv}\,\mathcal{A})$, $M = f(N)$ où N est barycentre de n points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{A}$ affectés de coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ positifs. Comme f conserve les barycentres, M sera le bary. de $f(A_1), \dots, f(A_n) \in f(\mathcal{A})$ affectés des m̂ coeff. positifs donc $M \in \mathrm{Conv}(f(\mathcal{A}))$.

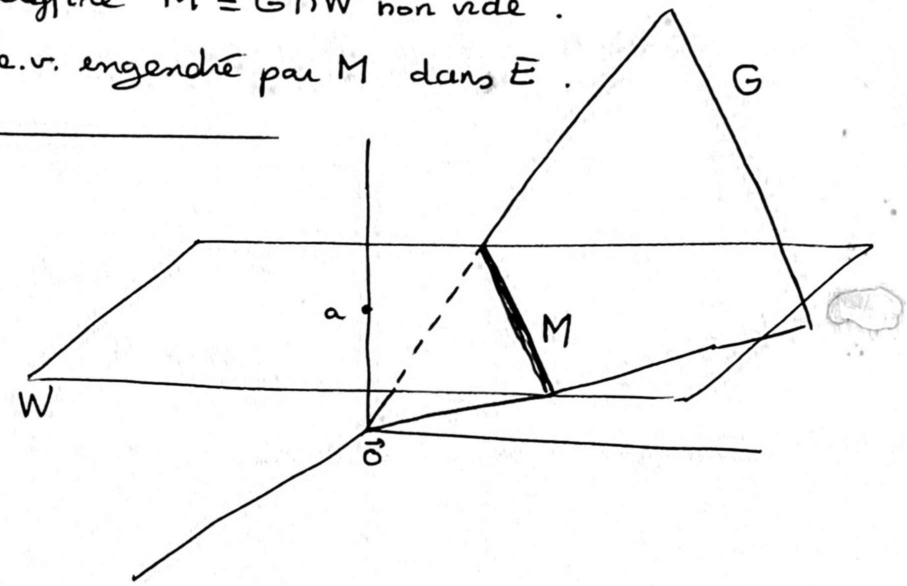
* L'intérieur du carré (bords compris) est l'enveloppe convexe des 4 sommets du carré. f affine transforme 2 dtes // en 2 ~~dtes~~ s.e.a // donc l'image du carré sera un ~~parallélogramme~~ parallélogramme "au sens large" (éventuellement aplati ou réduit à 1 pt)



Si f est une bij. affine, l'image du carré sera un ~~vrai~~ parallélogramme non aplati

NB : preuve directe $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(D)f(C)} \Rightarrow f(A)\,f(B)\,f(C)\,f(D)$ parall.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps commutatif K.
Soit W un hyperplan affine de E ne contenant pas $\vec{0}$. Un sev G de E coupe W suivant un sous-espace affine $M = G \cap W$ non vide.
Montrer que G est le s.e.v. engendré par M dans E.



* G est un sev qui contient M

* Si F est un sev qui contient M, il reste à montrer que F contient G.

On a : $\dim M = \dim G \cap W = \dim G + \underbrace{\dim W}_{n-1} - \underbrace{\dim (\vec{G} + \vec{W})}_{n}$

$= \dim G - 1$

car $\vec{W}$ est un hyperplan vectoriel de E et il existe un vecteur de G n'appartenant pas à $\vec{W}$ (sinon $\vec{G} \subset \vec{W} \Rightarrow G <\!\!/\!\!/ W \}$ $\vec{0} \in G$ et $\vec{0} \notin W$ $\Rightarrow G \cap W = \emptyset$, rejeté par hypothèse) donc $\vec{G} + \vec{W} = \vec{E}$.

Ainsi M est un hyperplan affine de G.

Notons $M = a + \vec{M}$ où $a \notin \vec{M}$ et $a \in G$.
$\vec{M}$ étant un hyperplan de G, et $a \notin \vec{M}$, assurent que $G = \vec{M} \oplus Ka$,
soit :

$$\forall x \in G \quad \exists m \in \vec{M} \quad \exists k \in K \quad x = m + ka$$

d'où $x = \underbrace{a+m}_{\in M \subset F} + \underbrace{(k-1)a}_{\in F} \in F$. On a montré que $G \subset F$.

(car $a \in M \subset F$ et F sev)

CQFD

(réf. Martin p 187 au sujet de la complétée projective $\hat{A}$ d'une variété affine A.)

Soient A un anneau intègre et K un corps contenant A.
Vérifier que l'anneau B des entiers de K sur A est intégralement clos.
(Autrement dit : la fermeture ~~algébri~~ intégrale de A dans K est intégralement close)

Notons k le corps des fractions de B. On a

$$A \subset B \subset K$$

donc

$$\begin{array}{ccc} B & \subset & K \\ \cap & \nearrow_{\varphi} & \\ k & & \end{array}$$

où φ est un monomorphisme de corps

Montrer que B est intégralement clos revient à prouver que l'anneau B' des entiers de k sur B est, en fait, B.

On a : $A \subset B \subset \varphi(B') \subset K$

$\varphi(B')$ est un anneau entier sur B. Comme B est entier sur A, $\varphi(B')$ sera entier sur A (II Pro 2 p 35 de Samuel), et vu la définition de B :

$$\varphi(B') = B$$

soit

$$B' = B$$

CQFD

> Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors il existe un voisinage ouvert de x_0 tel que pour tout x appartenant à ce voisinage, $f(x)$ et $g(x)$ soient de même signe, ou nuls en même temps.

Par hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

$$\Rightarrow g(x) - \varepsilon |g(x)| \leq f(x) \leq g(x) + \varepsilon |g(x)|$$

Prenons $\varepsilon < 1$. Alors $1 - \varepsilon > 0$ et l'on aura pour $|x - x_0| < \eta$:

- Si $g(x) > 0$, $0 < (1-\varepsilon)\, g(x) \leq f(x) \leq (1+\varepsilon)\, g(x)$ donc $f(x) > 0$
- Si $g(x) < 0$, $(1+\varepsilon)\, g(x) \leq f(x) \leq (1-\varepsilon)\, g(x) < 0$ donc $f(x) < 0$
- Si $g(x) = 0$, $0 \leq f(x) \leq 0$ soit $f(x) = 0$

Cette proposition, facile à démontrer, n'en est pas moins importante et souvent bâclée par manque de temps.

Quatre cercles de même rayon.

Dans le plan affine euclidien, quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, de centres respectifs O_1, O_2, O_3, O_4, et de même rayon R passent par le même point M. On suppose que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se recoupent en B_1, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ en B_2, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ en B_3, et $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ en B_4.

1) Démontrer que le quadrilatère $B_1B_2B_3B_4$ est un parallélogramme.

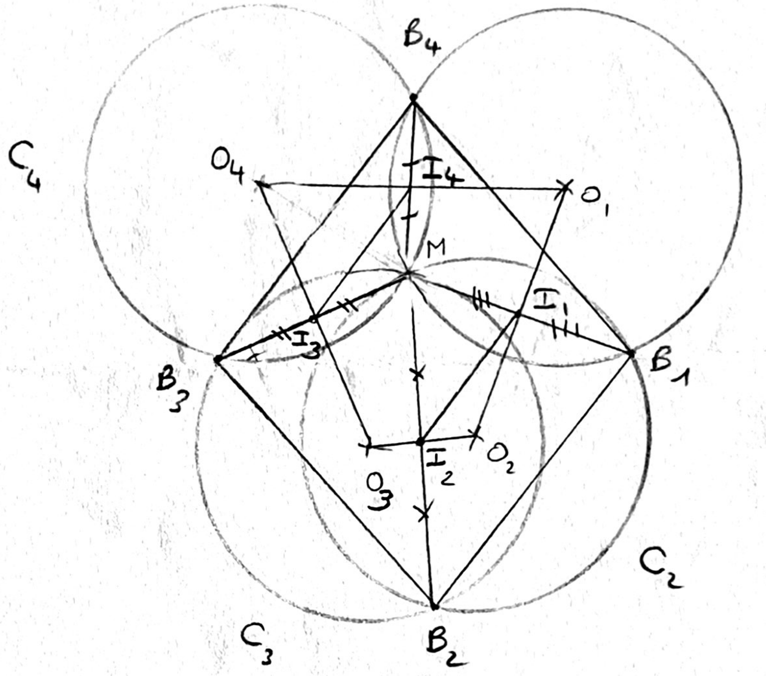
2) Comment choisir les centres O_1, O_2, O_3, O_4 pour que $B_1B_2B_3B_4$ soit un losange ? un rectangle ? un carré ?

Solution :

[0] [ucer0004] Dany-Jack Mercier (réf. Premier ex., partie II, du CAPES interne 1999, 2ème comp. L'énoncé de la réciproque de cet exercice est dans le même CAPES dans la partie IV).

1) $B_1B_2B_3B_4$ est un parallélogramme

Soit I_i le milieu de $[MB_i]$. D'après Thalès et compte tenu du fait que les quadri. $O_1MO_4B_4$, $O_4MO_3B_3$, $O_3MO_2B_2$, $O_2MO_1B_1$ sont des losanges, $(B_1B_2) // (I_1I_2) // (O_1O_3) // (I_3I_4) // (B_3B_4)$. De m̂ $(B_2B_3) // (B_1B_4)$. □



2)

$B_1B_2B_3B_4$ losange $\iff B_1B_2 = B_1B_4 \iff 2\,I_1I_2 = 2\,I_1I_4$

$\iff$ $\boxed{O_1O_3 = O_2O_4}$

3)

$B_1B_2B_3B_4$ rectangle $\iff (B_1B_2) \perp (B_1B_4) \iff (I_1I_2) \perp (I_1I_4)$

$\iff$ $\boxed{(O_1O_3) \perp (O_2O_4)}$

4)

$B_1B_2B_3B_4$ carré $\iff \begin{cases} B_1B_2B_3B_4 \text{ losange} \\ B_1B_2B_3B_4 \text{ rectangle} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} O_1O_3 = O_2O_4 \\ (O_1O_3) \perp (O_2O_4) \end{cases}}$

Cinématique

Les mouvements rectilignes uniformes, uniformément accélérés, vibratoires simples ont été étudiés en première E.

I Définitions

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ une loi horaire, où E = espace affine euclidien de repère ~~base~~ orthonormée $(O, \vec{e}_i\ i = 1 \text{ à } n)$. On note $f(t) = \overrightarrow{OM(t)}$.
$t \mapsto M(t)$

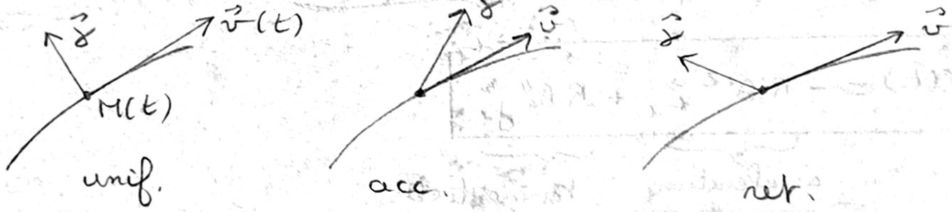
$\{M(t), t \in I\}$ ≑ courbe du mouvement

$\begin{cases} \text{Si } f \text{ est dérivable, } f'(t) = \text{vecteur vitesse en } M(t) = \vec{v}(t) \\ \text{Si } f \text{ est 2 fois dérivable, } f''(t) = \text{" accélération en } M(t) = \vec{\gamma}(t) \end{cases}$

Par définition, le mvt est dit unif. si $\|\vec{v}(t)\| = C^{te}\ \forall t$
ret. si $\|\vec{v}(t)\|$ st. décroissante avec t.
acc. si $\|\vec{v}(t)\|$ st. croissante ".

Pro | Soit $f : I \to E$ un mvt 2 fois dérivable sur l'int. I. Alors :
f est unif. $\iff \vec{v}(t).\vec{\gamma}(t) = 0\quad \forall t \in I$
f est ret. $\iff \vec{v}(t).\vec{\gamma}(t) \leq 0$ et $\nexists D$ int de $\mathbb{R} / \{t / \vec{v}(t).\vec{\gamma}(t) = 0\} \supset D$
f est accel. $\iff \vec{v}(t).\vec{\gamma}(t) \geq 0$ et $\nexists D$ int de $\mathbb{R} / \{t / \vec{v}(t).\vec{\gamma}(t) = 0\} \supset D$

preuve :



Considérons $t \overset{\varphi}{\longmapsto} \|\vec{v}(t)\|^2 = \vec{v}(t).\vec{v}(t)$. φ est dérivable sur I, de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$, de dérivée $2\vec{v}(t).\vec{\gamma}(t)$. Par suite :

f unif. $\iff \vec{v}(t).\vec{\gamma}(t) = 0\quad \forall t \in I$

etc...

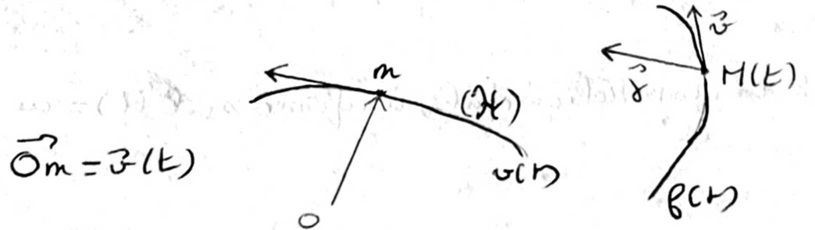
CQFD

Def | Soit f un mvt 2 fois dérivable. L'Hodographe du mvt est la courbe $\{\vec{v}(t) / t \in I\}$ où $\vec{v}(t)$ = vect. vit. de f à la date t.

la loi horaire $I \to E$, $t \mapsto m(t)$ où $\overrightarrow{Om(t)} = \vec{v}(t)$

Pro | Le vecteur vitesse de $M(t)$ sur l'hodographe du mvt $f(t)$ n'est autre que le vecteur accélération $\vec{\gamma}(t)$ à la date t du mvt f.

(trivial)

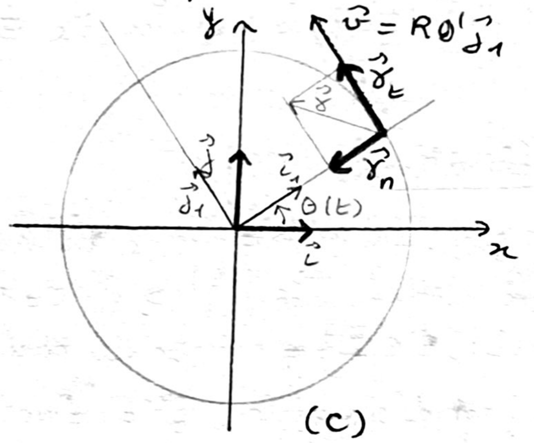


II Mvt circulaire

E = e.a. euclidien de repère orth. direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(C) = cercle de centre O de rayon R. Equation paramétrique du cercle :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$



Soit $\varphi : t \mapsto \theta = \theta(t)$

Déf : Un mvt circulaire est un mvt dont la courbe est un cercle.

Ainsi, l'équation horaire d'un tel mvt est :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$$

de sorte que

$$\vec{v}(t) \begin{cases} x'(t) = -R\sin\theta(t) \cdot \theta'(t) \\ y'(t) = R\cos\theta(t) \cdot \theta'(t) \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = R\theta'(t)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta(t)\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta(t)\right)\vec{j}\right] = R\theta'(t)\,\vec{j}_1$$

$\theta'(t)$ s'appelle la vitesse angulaire du mvt à l'instant t.

$$\vec{\gamma}(t) \begin{cases} x''(t) = -R\cos\theta(t)\,[\theta'(t)]^2 - R\sin\theta(t) \cdot \theta''(t) \\ y''(t) = -R\sin\theta(t) \cdot [\theta'(t)]^2 + R\cos\theta(t) \cdot \theta''(t) \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}(t) = R\Big[\theta'^2\underbrace{(-\cos\theta(t)\vec{i} - \sin\theta(t)\vec{j})}_{-\vec{i}_1} + \theta''(t)\underbrace{(-\sin\theta(t)\vec{i} + \cos\theta(t)\vec{j})}_{\vec{j}_1}\Big]$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(t) = \underbrace{-R\theta'^2\,\vec{i}_1}_{\text{accélération normale } \vec{\gamma}_n} + \underbrace{R\theta''\,\vec{j}_1}_{\text{tangentielle } \vec{\gamma}_t}}$$

NB : le mouvement est circulaire uniforme ssi $\vec{\gamma}(t)$ est normal à la trajectoire c.à.d ssi $\theta''(t) = 0$ $\forall t$, c.à.d ssi la vitesse angulaire $\theta'(t)$ est une constante. (C'est rassurant.)

NB : le mvt est périodique de période $\frac{2\pi}{\theta'}$ si il est uniforme (On pose aussi $\omega = \theta'$)

III Mvt hélicoïdal uniforme

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\,\theta \end{cases}$$

sont les équations param. de l'hélice circulaire

Si $\theta = \theta(t)$, on obtient un mvt hélicoïdal, uniforme si $\theta'(t) = \omega$ cte.

Alors $\theta = \omega t + \alpha$.

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t+\alpha) \\ y(t) = R\sin(\omega t+\alpha) \\ z(t) = h(\omega t+\alpha) \end{cases}$$

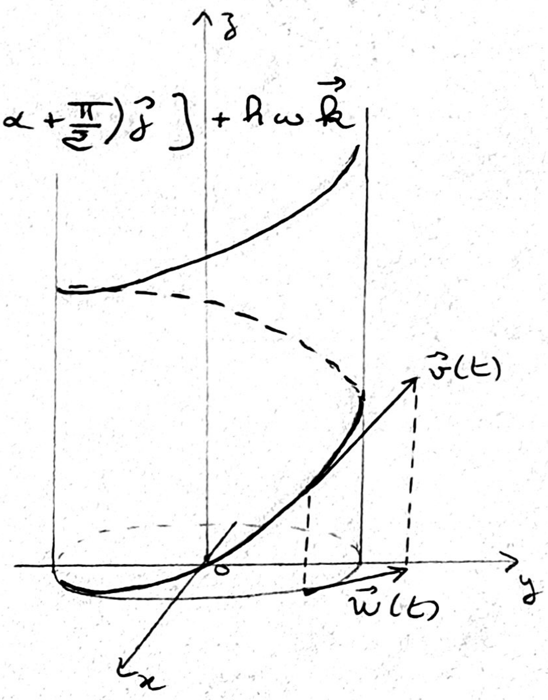
On a : $\begin{cases} x'(t) = -R\sin(\omega t+\alpha).\omega \\ y'(t) = R\cos(\omega t+\alpha).\omega \\ z'(t) = h\omega \end{cases}$

d'où $\vec{v}(t) = R\left[\cos(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})\vec{j}\right] + h\omega\vec{k}$

$= R\,\vec{w}(t) + h\omega\vec{k}$

On a $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{R^2 + h^2\omega^2} = C^{te}$ (heureusement)

Le pas de l'hélice est : $h\omega\frac{2\pi}{\omega} = h2\pi$.



Soient p et q deux nombres premiers naturels distincts, et $n = pq$.

1) Résoudre l'équation $\dot{x}^2 = \dot{x}$ dans l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) Expliciter complètement les solutions obtenues lorsque $n = 143$.

3) Reprendre les questions 1) et 2) avec l'équation $\dot{x}^2 = \dot{1}$, puis avec l'équation $\dot{x}^2 = \dot{0}$.

Solution :

[0] [ucog0019] Dany-Jack Mercier (réf. ~Aleph TC, ex 3.108 p177)

1) $\dot{x}^2 = \dot{x} \iff pq \mid x(x-1)$.

(1er cas) $p \mid x$ et $q \mid x$. Alors x est multiple de pq et $\boxed{\dot{x} = \dot{0}}$

(2e cas) $p \mid x-1$ et $q \mid x-1$. Dans ce cas $\dot{x} - \dot{1} = \dot{0}$ ie $\boxed{\dot{x} = \dot{1}}$

(3e cas) $p \mid x$ et $q \mid x-1$.

Alors $\begin{cases} x = up \\ x-1 = vq \quad \text{ie } x = vq+1 \end{cases}$ (*)

Cela entraine $up = vq + 1$, ie $\boxed{up - vq = 1}$.

Comme $\text{pgcd}(p,q) = 1$, il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tq $u_0 p - v_0 q = 1$, et :

$$up - vq = 1 \iff up - vq = u_0 p - v_0 q \iff (u-u_0)p = (v-v_0)q$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{Z} \begin{cases} u = u_0 + qt \\ v = v_0 + pt \end{cases}$$

Alors :

$$(*) \iff \begin{cases} x = (u_0 + qt)p \\ x = (v_0 + pt)q + 1 \end{cases} \iff x = u_0 p + nt \iff \boxed{\dot{x} = \dot{\overline{u_0 p}}}$$

(4e cas) $p \mid x-1$ et $q \mid x$.

Alors on applique le 3e cas en échangeant les rôles de p et q. On obtient :

$\dot{x} = \dot{\overline{u'_0 q}}$ avec (u'_0, v'_0) sol. de $u'_0 q - v'_0 p = 1$

~~Comme~~ On peut prendre : $v'_0 = -u_0$ et $u'_0 = -v_0$. Alors :

$$\boxed{\dot{x} = \dot{\overline{-v_0 q}}}$$

Conclusion : Les solutions de $\dot{x}^2 = \dot{x}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ~~sont~~ (si $n = pq$) sont :

$$\left\{ \dot{0}, \dot{1}, \dot{\overline{u_0 p}}, \dot{\overline{-v_0 q}} \right\}$$

2) Application numérique : $n = 143 = 11 \times 13$, avec $p = 11$ et $q = 13$

$11u_0 - 13v_0 = 1$ est réalisée avec $(u_0, v_0) = (6, 5)$.

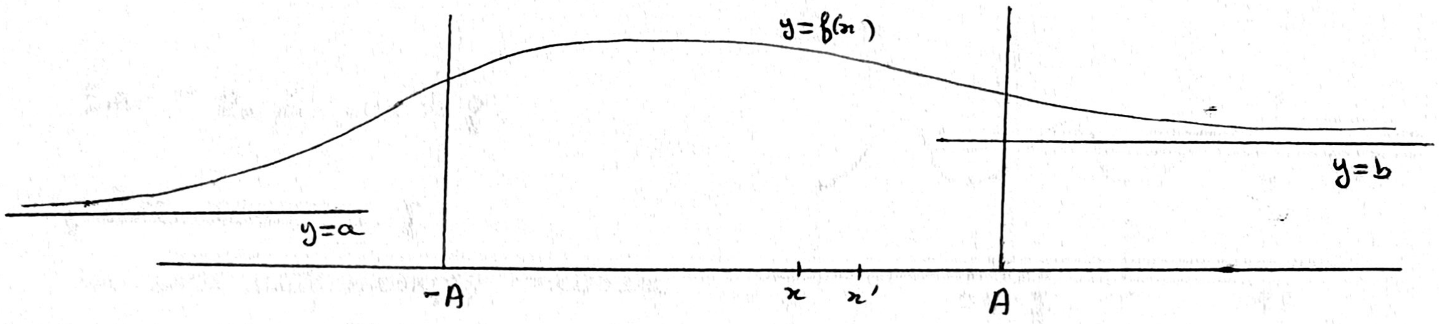
Les solutions de $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/_{143\mathbb{Z}}$ seront

$\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{\overline{6 \times 11}} = \dot{66}$ et $-\dot{\overline{5 \times 13}} = \dot{78}$.

3) a) (...)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Mq f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$



Par hypothèse :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \quad x \geq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$

$\qquad\qquad\qquad\quad x \leq -A \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$

f est continue sur le compact $[-A, A]$, donc sera uniformément continue sur $[-A, A]$ (Th. de Heine), ie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad x, x' \in [-A, A] \quad |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Il faut montrer que cette affirmation est encore vraie quand x, x' varient dans $\mathbb{R}$ en entier. Prenons tout de suite $\eta_0 = \text{Inf}(\eta, 2A)$ de sorte que $|x - x'| \leq \eta_0$ assure que l'on ne puisse pas avoir $x < A$ et $x' > A$. Envisageons les 2 cas restants :

* Si $x \in [-A, A]$ et $x' > A$,

$|f(x) - f(x')| \leq \underbrace{|f(x) - f(A)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f(A) - f(x')|}$

$\leq \varepsilon$ dès que $|x - A| \leq \eta_0$ donc dès que $|x - x'| \leq \eta_0$

$|f(A) - f(x')| \leq |f(A) - b| + |b - f(x')| \leq 2\varepsilon$

$\leq 3\varepsilon$ dès que $|x - x'| \leq \eta_0$

* Si $x < -A$ et $x' \in [-A, A]$, on fait de même.

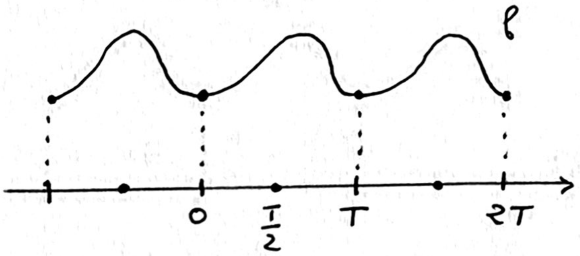
Ccl : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_0 \quad x, x' \in \mathbb{R} \quad |x - x'| \leq \eta_0 \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq 3\varepsilon$

et l'uniforme continuité de f est prouvée.

(réf. Serfati II. 1.28 p 43)

Montrer que toute application f continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Soit T la période de f.



f est continue sur $[0, T]$ donc sera uniformément continue sur cet intervalle (Th. de Heine) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad \forall x, x' \in [0, T] \quad |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Comme $f(x + T) = f(x)$ pour tout x, on aura aussi :

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x, x' \in [nT, (n+1)T] \quad |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

On peut ré-écrire $(*)$ avec des intervalles $\left[\frac{T}{2} + nT, \frac{T}{2} + (n+1)T\right]$ et prendre $\eta < \frac{T}{2}$ de sorte que si $|x - x'| < \eta$, alors x et x' appartiennent simultanément au même intervalle du type $[nT, (n+1)T]$ ou $\left[\frac{T}{2} + nT, \frac{T}{2} + (n+1)T\right]$, et conclure :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

CQFD

La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$?

L'uniforme-continuité s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}_+^* \quad |x - x'| \leq \eta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| < \varepsilon$$

et la négation s'énonce :

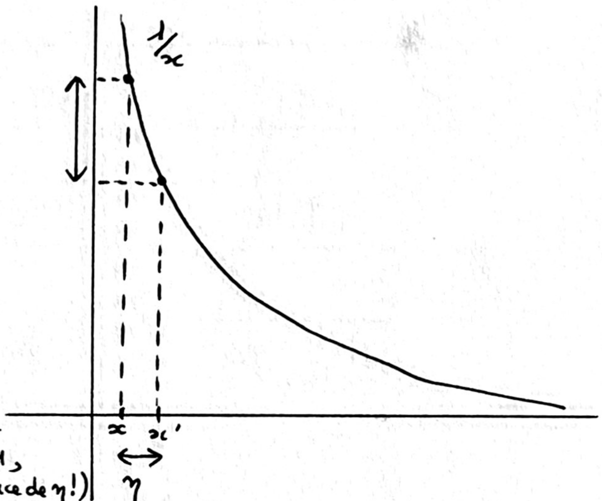
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x, x' \in \mathbb{R}_+^* \quad |x - x'| \leq \eta \text{ et } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| \geq \varepsilon \qquad (*)$$

Fixons $\varepsilon > 0$ quelconque.
Prenons $x' - x = \eta$ (η donné).

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| = \frac{|x' - x|}{x x'} = \frac{\eta}{x x'} \geq \frac{\eta}{x'^2}$$

et $\dfrac{\eta}{x'^2} \geq \varepsilon$ dès que $x' \leq \sqrt{\dfrac{\eta}{\varepsilon}}$

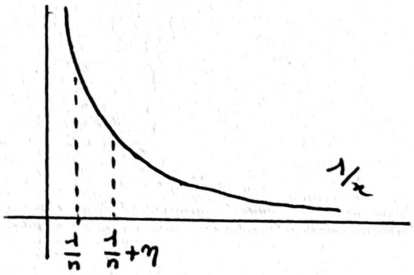
La condition $x > 0$ équivaut à $x' > \eta$, de sorte que tout revienne à trouver x' tel que $\eta < x' \leq \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon}}$, ce qui est possible si $\eta < 1$ et $\varepsilon = 1$, par ex. (Si $\eta \geq 1$, rien n'empêche de recommencer avec $\eta' < 1 \leq \eta$ à la place de η !)



Finalement $(*)$ est assuré et f n'est pas unif. cont. sur $\mathbb{R}_+^*$.

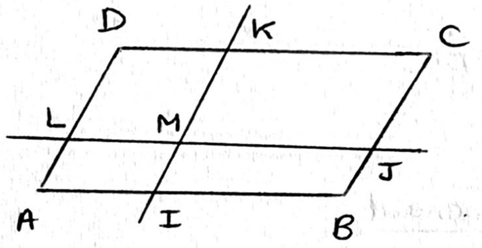
2e solution : On montre $(*)$ en utilisant les suites $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $x'_n = \dfrac{1}{n} + \eta$.

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left| n - \frac{1}{\frac{1}{n} + \eta} \right| = \frac{n^2 \eta}{1 + n\eta} \xrightarrow[(n \to +\infty)]{} +\infty$$

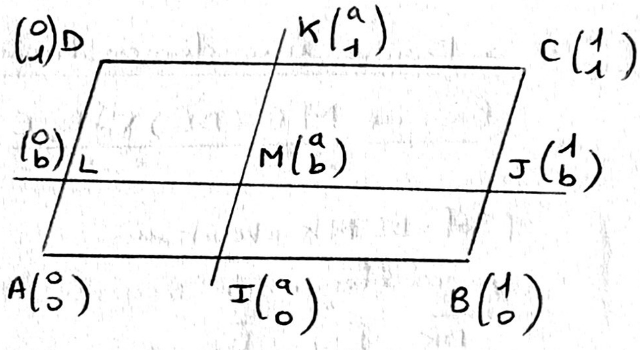


Ainsi, pour ε fixé et pour tout $\eta > 0$ donné, il existe N tel que : $n > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. CQFD

Soient ABCD un parallélogramme et M un point distinct de B et D. On construit les parallèles aux côtés de ce parallélogramme passant par M, comme sur la figure :



Mq les droites (LK), (AC), (IJ) sont parallèles ou concourantes



On résout le système

$$(I)\ \begin{cases} (b-1)x + ay = ab & (LK) \\ y = x & (AC) \\ bx + (a-1)y = ab & (IJ) \end{cases}$$

qui équivaut à $(II)\ \begin{cases} y = x \\ (a+b-1)x = ab \end{cases}$

1er cas : Si $a+b-1=0$,

* Si $ab=0$,

Si $a=0$, $b=1$ et $L=K$, absurde
Si $b=0$, $a=1$ et $I=J$, absurde
Ce cas ne se produit donc jamais

* Si $ab\neq 0$, le système n'a pas de solution.

On ne peut pas immédiatement conclure au parallélisme des 3 dtes mais on peut remarquer que le système (I) équivaut au système obtenu à partir de (I) en ne conservant que 2 équations au hasard, ce qui prouve le parallélisme des droites deux à deux.

2e solution : si $a+b-1=0$, on calcule $\vec{LK}\binom{1}{1}$, $\vec{AC}\binom{1}{1}$, $\vec{IJ}\binom{1}{1}$.

(réf Terracher 92 I, TCE, p14)

2e cas : Si $a+b-1 \neq 0$,

$$(I) \Leftrightarrow y = x = \frac{ab}{a+b-1}$$ et les 3 droites concourent.

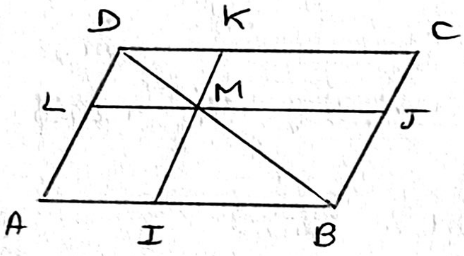
CQFD

Prolongements :

* Où faut-il placer M pour que les 3 dtes soient parallèles ?

(Sol : M doit vérifier $a+b-1=0$, ie doit être sur (BD))

* Donner une démonstration géométrique de cette situation lorsque $M \in (DB) \setminus \{D, B\}$.

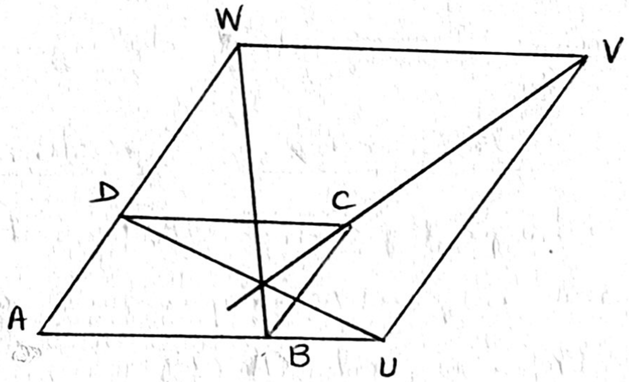


(Sol : DLMK étant un parallélogramme,

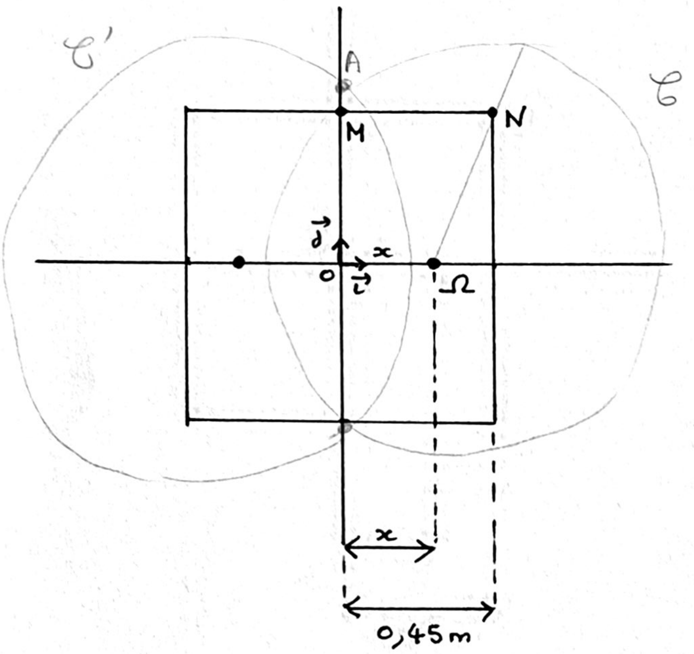
$$\frac{\overline{DK}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DL}}{\overline{DA}}$$

et la réc. de Thalès permet de conclure)

* Mq les dtes (WB), (DU) et (CV) de la figure ci-dessous sont concourantes ou parallèles :



Peut-on recouvrir une table carrée de 90 cm de côté par deux nappes rondes de 1m de diamètre chacune ?
(réf. APMEP n° 384, article de Puyou sur les modules en 2nd)



$0 \leq x \leq 0,5$

Les 2 nappes circulaires recouvriront la table ssi les points M et N (et par suite le segment [MN], car un disque est un ensemble convexe) sont dans l'un des disques limités par les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

$\Omega\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix} 0 \\ 0,45 \end{pmatrix}$ $N\begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,45 \end{pmatrix}$

La CNS s'écrit : $\begin{cases} \Omega M \leq 0,5 \\ \Omega N \leq 0,5 \end{cases}$

que l'on traduit :

$$\begin{cases} x^2 + 0,45^2 \leq 0,5^2 \\ (x-0,45)^2 + 0,45^2 \leq 0,5^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq 0,0475 \\ (x-0,45)^2 \leq 0,0475 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0,2179\ldots \\ |x-0,45| \leq 0,2179 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0,2179 \\ 0,2321 \leq x \leq 0,6679 \end{cases}$$ système qui ne possède pas de solution !

Ccl :